Lista 3 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2023

Notação: nesta lista usaremos a convenção do Wald, ${\Gamma^c}_{ab} = \frac{1}{2}\, g^{ck}\, (\partial_a g_{bk} + \partial_b g_{ak} - \partial_k g_{ab})$, para os símbolos de Christoffel.

1. Considere o espaço de Minkowski com coordenadas cartesianas (T, X, Y, Z) no referencial inercial K. Vamos introduzir coordenadas girantes em relação a K, com velocidade angular ω, por :

$$
\begin{aligned}
t &= T, \\
x &= \cos(\omega T)X + \operatorname{sen}(\omega T)Y, \\
y &= -\operatorname{sen}(\omega T)X + \cos(\omega T)Y, \\
z &= Z.
\end{aligned}
$$

   (a) Mostre que a métrica nas novas coordenadas é dada por

$$
(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1+\omega^2(x^2+y^2) & -\omega\, y & \omega\, x & 0 \\ -\omega\, y & 1 & 0 & 0 \\ \omega\, x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

   (b) Calcule os coeficientes da conexão associados a essa métrica.

   (c) Encontre as equações das geodésicas nessas coordenadas.

   (d) Mostre que elas satisfazem as equações de movimento

$$
m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x}) - 2m\,\vec{\omega}\times\frac{d\vec{x}}{dt}.
$$

   Interprete este resultado em termos de forças centrífuga e de Coriolis.

2. Considere o espaço-tempo com métrica

$$
ds^2 = -\,(1+2gz)\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,
$$

   válida perto da origem espaço-temporal, onde $gz \ll 1$, com g constante positiva.

   (a) Calcule os coeficientes da conexão associados a essa métrica.

(b) Considere a equação da geodésica para uma partícula inicialmente na origem e sob a aproximação de que sua velocidade é muito pequena. Qual é a aceleração coordenada da partícula nesse regime?

(c) Encontre um conjunto de coordenadas normais em torno da origem. Como o movimento da partícula acima é descrito nessas coordenadas? Interprete.

3. Considere o toro mostrado na figura abaixo (à esquerda):

(a) Parametrize tal superfície usando as coordenadas θ e ϕ da figura.

(b) Obtenha o tensor métrico g_{ij} na base coordenada dada por ∂_θ e ∂_ϕ.

(c) Usando o que você obteve no item (b), escreva a integral que corresponde ao comprimento da curva dada por $\phi = \phi_0$ que abraça o toro e a calcule. Faça o mesmo para a curva $\theta = \theta_0$.

(d) Exiba uma curva que dá uma volta no toro como mostrado na figura da direita. A seguir, escreva a expressão da integral (não é necessário calculá-la) que corresponde ao comprimento desta curva.

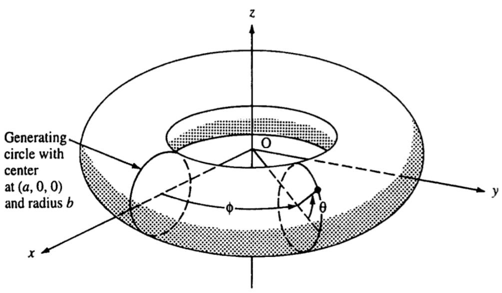
(e) Ache os coeficientes da conexão riemanniana associada à métrica g_{ij}.

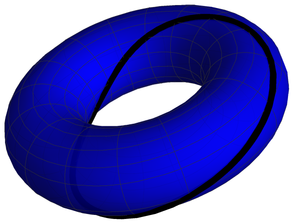
(f) As curvas corrspondentes a $\phi = \phi_0$ são geodésicas? E as correspondentes a $\theta = \theta_0$?

(g) Considere um vetor $V_p = c^1\, \partial_\theta|_p + c^2\, \partial_\phi|_p$ no ponto p com coordenadas $(\theta(p), \phi(p)) = (\theta_0, 0)$. Escreva o problema de Cauchy correspondente a fazer o transporte paralelo de V_p ao longo da curva $\theta = \theta_0$ que dá a volta no toro. Não é preciso resolvê-lo.

(h) Resolva este problema de Cauchy no caso em que $\theta_0 = 0$. Compare V_p com o resultado final do vetor paralelamente transportado até voltar ao ponto p. Interprete o resultado.

(i) Repita o item anterior mas agora para a curva com $\theta_0 = \pi/6$.





4. A fórmula de Jacobi relaciona as derivadas do determinante de uma matriz com derivadas de suas entradas:

$$\delta(\ln \det M) = \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M),$$

onde M é matriz inversível e δ é uma derivada qualquer.

(a) Demonstre a fórmula de Jacobi no caso em que M é simétrica. Dica: diagonalize M.[1]

(b) Seja $g_{\mu\nu}$ um tensor métrico e g seu determinante. Use o item anterior para mostrar que $\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$.

(c) Mostre que $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \ln\sqrt{|g|}$.

(d) Mostre que $\nabla_\mu X^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}X^\mu\right)$.

5. Mostre que os coeficientes de conexão se transformam como

$$\Gamma^{\alpha'}{}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}.$$

6. Considere uma curva $\gamma(\lambda)$ na variedade M. Suponha que façamos uma reparametrização via $\lambda = \lambda(\bar{\lambda})$.

(a) Mostre que

$$\frac{D}{d\bar{\lambda}}\left(\frac{d\gamma}{d\bar{\lambda}}\right) = \frac{d^2\lambda}{d\bar{\lambda}^2}\left(\frac{d\lambda}{d\bar{\lambda}}\right)^{-1}\frac{d\gamma}{d\bar{\lambda}} + \left(\frac{d\lambda}{d\bar{\lambda}}\right)^2\frac{D}{d\lambda}\left(\frac{d\gamma}{d\lambda}\right).$$

(b) Suponha que $\gamma(\bar{\lambda})$ só tem aceleração na direção paralela a $\frac{d\gamma}{d\bar{\lambda}}$, isto é, que

$$\frac{D}{d\bar{\lambda}}\left(\frac{d\gamma}{d\bar{\lambda}}\right) = f(\bar{\lambda})\frac{d\gamma}{d\bar{\lambda}}.$$

Mostre que nesse caso é sempre possível escolher uma reparametrização $\lambda = \lambda(\bar{\lambda})$ tal que a curva reparametrizada é uma geodésica, isto é,

$$\frac{D}{d\lambda}\left(\frac{d\gamma}{d\lambda}\right) = 0.$$

7. Dados dois campos de vetores V, W na variedade M, definimos o comutador como a aplicação que leva a função $f \in C^\infty$ na função

$$[V, W](f) := V(W(f)) - W(V(f)).$$

(a) Dada uma carta com coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n)$ de M, podemos escrever V e W como $V = V^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $W = W^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Mostre que

$$[V, W]^\mu = V^\nu\frac{\partial W^\mu}{\partial x^\nu} - W^\nu\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}.$$

[1] O caso geral pode ser obtido de maneira análoga: como ambos os lados dessa equação são polinômios nas entradas de M, basta mostrar que essa identidade vale no subconjunto denso das matrizes diagonalizáveis.

(b) Mostre que o comutador $[V,W]$ define, de fato, um campo vetorial em M. Você pode fazer isso mostrando que as componentes acima se transformam corretamente sob troca de coordenadas ou, alternativamente, mostrando que $[V,W](f)$ é linear em f e que $[V,W](fg) = [V,W](f)\ g + f\ [V,W](g)$ para todos $f, g \in C^\infty(M)$.

(c) Mostre que tal comutador satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[[U,V],W] + [[W,U],V] + [[V,W],U] = 0.$$

(d) Consideremos agora uma base local de TM dada por n campos vetoriais $e_1, \ldots, e_n$, definidos em um aberto $U \subset M$ (não são necessariamente vindos de uma base coordenada). Como tais campos são base de T_pM para cada $p \in U$, podemos expandir $[e_i, e_j]$ como

$$[e_i, e_j] = C^k{}_{ij}\, e_k.$$

Mostre que $C^k{}_{ij}$ é antissimétrico em ij e escreva a identidade de Jacobi como uma relação entre os $C^k{}_{ij}$.

(e) Considere a base local dual $\{\theta^i\}$ de $\{e_i\}$ acima. Isto é, cada θ^i é um campo de covetores (1-forma) tal que $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$. Podemos expandir e_i e θ^i nas bases coordenadas acima como $\mathrm{e}_i = (e_i)^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\theta^i = (\theta^i)_\mu dx^\mu$. Mostre que

$$\frac{\partial(\theta^k)_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial(\theta^k)_\nu}{\partial x^\mu} = C^k{}_{ij}(\theta^i)_\mu(\theta^j)_\nu.$$

Dica: contraia ambos os lados com $(e_a)^\mu(e_b)^\nu$.

(f) Observe que o comutador entre dois campos de vetores de uma base coordenada qualquer $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ é sempre nulo, i.e. $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Queremos mostrar que a recíproca também é verdade, isto é, que se $[e_i, e_j] = 0$ para todo ij, então existem coordenadas locais $y^1, \ldots y^n$ tais que $e_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$. Para isso, note que as equações $\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = F_\mu$, com $\mu = 1, \ldots, n$, para a função desconhecida f, possuem solução se e somente se $\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu}$. Use esse fato, juntamente com o item (e), para encontrar as novas coordenadas.

(g) Dê um exemplo de dois campos de vetores linearmente independentes V e W em $\mathbb{R}^2$ com comutador não nulo. Assim, $\{V_p, W_p\}$ é uma base para $T_p\mathbb{R}^2$ em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^2$ mas, por causa dos resultados acima, não pode ser escrita como uma base coordenada (nem mesmo localmente).